数理解析研究所講究録
1084 巻 1999 年 1-15

台形則により得られる scaling 係数, wavelet 係数の誤差解析

愛工大・電子・秦野和郎 (Kazuo Hatano)

1. はじめに.

Wavelet 変換には Mallat の算法が使われる. すなわち, 多重解像度解析の性質から導かれる漸化式を使って, 与えられた関数の scaling 係数, wavelet 係数を少ない計算量で求める. この方法は高速 wavelet 変換と呼ばれている. しかし, この計算法にはいくつかの問題点がある. その一つが, 初期値の問題である. 等間隔の離散点上で関数値が与えられたとき, 最も細かいレベルにおける scaling 係数の値を適当に与えなければならない.

初期値の与え方としていくつかの方法が提案されている. しかし, 初期値をどのように与えるとどのような効果があるかについては殆ど議論の対象となっていない. ここでは, 十分に滑らかな関数に対して, 台形則を使って初期値を与え, wavelet 変換を適用した時に, scaling 係数, wavelet 係数の誤差がどのようになるかについて議論する.

さて, I を実軸上の有界閉区間とし, 区間 I 上で区分的に連続であるような実関数の全体を, $\overline{PC}[I]$ とする. 又, 実軸上で区分的に連続で且つ, 自乗可積分であるような実関数の全体を $\overline{PC}(\mathbf{R})$ とする. 更に, $f(x) \in C^{K-1}[I]$, $f^{(K)}(x) \in \overline{PC}[I]$ であるような実関数 $f(x)$ の全体を $W^K_{PC}[I]$ とする.

$f(x) \in \overline{PC}(\mathbf{R})$ の scaling 係数, wavelet 係数は, それぞれ,

$$A_k^{(j)} = 2^j \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi_{j,k}(x)dx \quad , \quad B_k^{(j)} = 2^j \int_{\mathbf{R}} f(x)\psi_{j,k}(x)dx \tag{1.1}$$

で与えられる. ここで,

$$\phi_{j,k}(x) = \phi(2^j x - k) \quad , \quad \psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k) \tag{1.2}$$

であり, $\phi(x)$,$\psi(x)$ は vanishing moment が K 次の Daubechies のそれぞれ, scaling 関数, wavelet 関数である. これらの関数は次の定義に従う. すなわち,

$$\begin{cases} \phi(x) = 2\displaystyle\sum_{k=-\lambda}^{2K-1-\lambda} c_k \phi(2x-k) \ , \ \int_{\mathbf{R}} \phi(x)\phi(x-m)dx = \delta_{m,0} \ , \\ \psi(x) = 2\displaystyle\sum_{k=2\mu-2K+\lambda}^{2\mu-1+\lambda} \check{c}_k \phi(2x-k) \quad , \quad \check{c}_k = (-1)^k c_{2\mu-1-k} \quad , \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \phi(x)\psi(x-m)dx = 0 \quad , \quad \int_{\mathbf{R}} \psi(x)\psi(x-m)dx = \delta_{m,0} \quad , \\ \displaystyle\int_{\mathbf{R}} x^l \psi(x)dx = 0 \ : \ 0 \le l \le K-1 \quad , \\ \operatorname{supp} \phi = [-\lambda, 2K-1-\lambda] \quad , \quad \operatorname{supp} \psi = [\mu-K, \mu+K-1] \end{cases} \tag{1.3}$$

である. ここで, λ , μ は $|\phi(\lambda)| \ge |\phi(j)|$: $j \in \mathbf{Z}$ で, $\mu = 1$ ととるのが好ましい.

$N=2^p$ として, $f(x)\in\overline{PC}(\mathbf{R})$ の等間隔離散点上の値, $f(r/N): r\in\mathbf{Z}$ が与えられるとする. ここでの目的は $f(x)\in W^{2K}_{PC}[\mathrm{supp}\ \phi_{j,k}\cup\mathrm{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対する scaling 係数, wavelet 係数を, 台形則 (この場合は, Riemann 和と同じ),

$$\ddot{A}^{(j)}_k=\frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}f\Big(\frac{r}{N}\Big)\phi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)\quad,\quad \ddot{B}^{(j)}_k=\frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}f\Big(\frac{r}{N}\Big)\psi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)\tag{1.4}$$

で近似したときの誤差, $A^{(j)}_k-\ddot{A}^{(j)}_k$, $B^{(j)}_k-\ddot{B}^{(j)}_k$ を評価する事である.

台形則の誤差は通常, $O(1/N)$ であるが $\phi(x)$, $\psi(x)$ は compact support であり, 両端では "高次の零" であるから, $O(1/N)$ よりは高い収束率を持つ筈である. しかし, この問題を Euler Maclaurin の総和公式を使って説明することは難しい. ここでは scaling 関数, wavelet 関数の moment の性質を検討して誤差解析を行い, 誤差の性質を知るための有用な結果を得た.

2. 問題の背景.

本稿での目的は, 式 (1.4) で与えられる値の, 式 (1.1) で与えられる値に対する誤差を導く事であるが, ここではどの様な背景からこの様な問題が生ずるかを述べる.

$f(x)\in\overline{PC}(\mathbf{R})$ は

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}A^{(q)}_k\phi_{q,k}(x)+\sum_{j=q}^{\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}}B^{(j)}_k\psi_{j,k}(x)\tag{2.1}$$

と wavelet 展開される. これを有限項で打ち切った関数, $f_p(x)$ は,

$$f_p(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}A^{(q)}_k\phi_{q,k}(x)+\sum_{j=q}^{p-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}B^{(j)}_k\psi_{j,k}(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}A^{(p)}_k\phi_{p,k}(x)\tag{2.2}$$

で与えられる. 上式に現れる係数に関して,

(i) $A^{(p)}_k$ を与えて, $A^{(q)}_k$, $B^{(j)}_k$ を得る事を wavelet 変換と言う. 逆に,
(ii) $A^{(q)}_k$, $B^{(j)}_k$ を与えて, $A^{(p)}_k$ を得る事を wavelet 逆変換と言う.

式 (1.1) で与えられる scaling 係数, wavelet 係数は, 漸化式

$$A^{(j-1)}_k=\sum_{l=-\lambda}^{2K-1-\lambda}c_lA^{(j)}_{l+2k}\quad,\quad B^{(j-1)}_k=\sum_{l=2\mu-2K+\lambda}^{2\mu-1+\lambda}\check{c}_lA^{(j)}_{l+2k}\tag{2.3}$$

及び,

$$A^{(j+1)}_k=2\sum_{l\in\mathbf{Z}}\big(c_{k-2l}A^{(j)}_l+\check{c}_{k-2l}B^{(j)}_l\big)\tag{2.4}$$

を満たす. 従って,

$$\begin{aligned}A^{(p)}_k&=2^p\int_{\mathbf{R}}f(x)\phi_{p,k}(x)dx=2^p\int_{\mathbf{R}}f(x)\phi(2^px-k)dx\\&=\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda}f\Big(\frac{x+k}{2^p}\Big)\phi(x)dx\end{aligned}\tag{2.5}$$

を計算出来れば, $A_k^{(q)}$, $B_k^{(j)}$ を式 (1.1) を使って計算する必要はなく, 式 (2.3) を使って計算出来る. これが高速 wavelet 変換である.

しかし, 離散点上における関数値, $f(r/N): r \in \mathbf{Z}$ のみが与えられたときは, 式 (2.5) を使って, $A_k^{(p)}$ を計算することが出来ない. すなわち, 初期化の問題が生ずる.

多くの場合,

$$\bar{A}_k^{(p)} = f\left(\frac{k}{N}\right) \quad : \quad k \in \mathbf{Z} \tag{2.6}$$

として, scaling 係数, wavelet 係数に代わる値を,

$$\bar{A}_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\lambda}^{2K-1-\lambda} c_l \bar{A}_{l+2k}^{(j)} \quad , \quad \bar{B}_k^{(j-1)} = \sum_{l=2\mu-2K+\lambda}^{2\mu-1+\lambda} \check{c}_l \bar{A}_{l+2k}^{(j)} \tag{2.7}$$

を使って計算する. しかし, これにより得られる $\bar{A}_k^{(j)}$, $\bar{B}_k^{(j)}$ と式 (1.1) の値との関連をつけにくいのが難点である. dilation equation から得られる式,

$$\phi_{j,k}(x) = 2\sum_{l\in\mathbf{Z}} c_l \phi_{j+1,l+2k}(x) \quad , \quad \psi_{j,k}(x) = 2\sum_{l\in\mathbf{Z}} \check{c}_l \phi_{j+1,l+2k}(x) \tag{2.8}$$

を使うと, 式 (1.4) で与えられる, $\ddot{A}_k^{(j)}$, $\ddot{B}_k^{(j)}$ が, 漸化式,

$$\ddot{A}_k^{(j-1)} = \sum_{l=-\lambda}^{2K-1-\lambda} c_l \ddot{A}_{l+2k}^{(j)} \quad , \quad \ddot{B}_k^{(j-1)} = \sum_{l=2\mu-2K+\lambda}^{2\mu-1+\lambda} \check{c}_l \ddot{A}_{l+2k}^{(j)} \tag{2.9}$$

及び,

$$\ddot{A}_k^{(j+1)} = 2\sum_{l\in\mathbf{Z}} \left(c_{k-2l}\ddot{A}_l^{(j)} + \check{c}_{k-2l}\ddot{B}_l^{(j)}\right) \tag{2.10}$$

を満たすことが分かる. そこで,

$$\ddot{A}_k^{(p)} = \sum_{r\in\mathbf{Z}} f\left(\frac{r}{N}\right)\phi_{p,k}\left(\frac{r}{N}\right) = \sum_{r=k-\lambda}^{k+2K-1-\lambda} f\left(\frac{r}{N}\right)\phi(r-k) \tag{2.11}$$

を計算し, 式 (2.9) を使って, $\ddot{A}_k^{(j)}$, $\ddot{B}_k^{(j)}$ を計算する. これらの値は, 式 (1.1) で与えられる, scaling 係数, wavelet 係数の良い近似値であると考えられる. 従って, $A_k^{(j)} - \ddot{A}_k^{(j)}$, $B_k^{(j)} - \ddot{B}_k^{(j)}$ を評価する問題が生ずる. これについては, 文献 [1] の p.1244 に, "$\ddot{A}_k^{(p)}$ の degree of accuracy は $K-1$ である" との記述がある以外, 殆ど検討の対象となっていない. 本稿ではある着想のもとに, より詳しい誤差解析を実行した. その糸口となったのは次の式である.

式 (1.1) で与えられる scaling 係数, wavelet 係数は,

$$\begin{cases} A_k^{(j)} = 2^j \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\phi_{j,k}(x)dx = 2^j \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(2^j x - k)dx \\ \qquad = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f\left(\frac{x+k}{2^j}\right)\phi(x)dx = \int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} f\left(\frac{x+k}{2^j}\right)\phi(x)dx \quad , \\ B_k^{(j)} = 2^j \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\psi_{j,k}(x)dx = \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} f\left(\frac{x+k}{2^j}\right)\psi(x)dx \end{cases} \tag{2.12}$$

と変形できる. 又,

$$\phi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)=\phi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}-\frac{k}{2^j}\Big) \quad , \quad \psi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)=\psi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}-\frac{k}{2^j}\Big) \tag{2.13}$$

を使うと, 式 (1.4) で与えられる, 台形則による scaling 係数, wavelet 係数の近似値は,

$$\begin{cases} \ddot{A}_k^{(j)}=\dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}\Big)\phi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)=\dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}+\frac{k}{2^j}\Big)\phi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}\Big) \quad , \\ \ddot{B}_k^{(j)}=\dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}\Big)\psi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big)=\dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}+\frac{k}{2^j}\Big)\psi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}\Big) \end{cases} \tag{2.14}$$

と変形出来る. これらの式に, 積分剰余項を持つ Taylor 展開式を適用し, scaling 関数, wavelet 関数の moment に関する性質を使うと誤差評価式を得る事が出来る.

3. scaling 係数, wavelet 係数等の別表現.

本章では, 積分剰余項を持つ Taylor 展開 (文献 [2],[3]) を使って, $A_k^{(j)}$, $B_k^{(j)}$, $\ddot{A}_k^{(j)}$, $\ddot{B}_k^{(j)}$ を扱い易い形に変形する.

$$\begin{cases} A_k^{(j)}=2^j\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\phi_{j,k}(x)dx=\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} f\Big(\frac{x+k}{2^j}\Big)\phi(x)dx \quad , \\ B_k^{(j)}=2^j\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\psi_{j,k}(x)dx=\int_{\mu-K}^{\mu+K-1} f\Big(\frac{x+k}{2^j}\Big)\psi(x)dx \end{cases} \tag{3.1}$$

に Taylor 展開式,

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{x+k}{2^j}\Big)&=\sum_{i=0}^{K-1}\frac{1}{i!}\Big(\frac{x}{2^j}\Big)^i f^{(i)}\Big(\frac{k}{2^j}\Big) \\ &\quad+\int_0^x \frac{1}{(K-1)!}\Big(\frac{x-t}{2^j}\Big)^{K-1} f^{(K)}\Big(\frac{t+k}{2^j}\Big)\frac{dt}{2^j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

を適用すると, $f(x)\in W_{PC}^K[\mathrm{supp}\ \phi_{j,k}]$ に対して,

$$A_k^{(j)}=\sum_{i=0}^{K-1}\frac{M_i}{2^{ji}i!}f^{(i)}\Big(\frac{k}{2^j}\Big)+\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda}\frac{G_K(t)}{2^{jK}(K-1)!}f^{(K)}\Big(\frac{t+k}{2^j}\Big)dt \tag{3.3}$$

となる. ここで,

$$M_i=\int_{\mathbf{R}} x^i\phi(x)dx=\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} x^i\phi(x)dx \tag{3.4}$$

は scaling 関数の i 次 moment である. 又,

$$G_K(t)=\begin{cases} -\displaystyle\int_{-\lambda}^{0}(x-t)_-^{K-1}\phi(x)dx \ : \ -\lambda\le t<0 \quad , \\ \displaystyle\int_{0}^{2K-1-\lambda}(x-t)_+^{K-1}\phi(x)dx \ : \ 0\le t\le 2K-1-\lambda \end{cases} \tag{3.5}$$

である.

$$
(3.6)\qquad \begin{cases} G_K(0-) = -\displaystyle\int_{-\lambda}^{0} x^{K-1}\phi(x)dx \ , \\ G_K(0+) = \displaystyle\int_{0}^{2K-1-\lambda} x^{K-1}\phi(x)dx \end{cases}
$$

であるから,

$$
(3.7)\qquad G_K(0+) - G_K(0-) = \int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} x^{K-1}\phi(x)dx = M_{K-1}
$$

となる. 一般に $M_{K-1} \neq 0$ であるから, $G_K(t)$ は $t=0$ で不連続である.

次に, $f(x) \in W_{PC}^{K}[\mathrm{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対して,

$$
(3.8)\qquad B_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{N_i}{2^{ji} i!} f^{(i)}\Big(\frac{k}{2^j}\Big) + \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} \frac{H_K(t)}{2^{jK}(K-1)!} f^{(K)}\Big(\frac{t+k}{2^j}\Big)dt
$$

となる. ここで,

$$
(3.9)\qquad N_i = \int_{\mathbf{R}} x^i \psi(x)dx = \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} x^i \psi(x)dx
$$

は wavelet 関数の i 次 moment である. 又,

$$
(3.10)\qquad H_K(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{\mu-K}^{0} (x-t)_-^{K-1}\psi(x)dx \ : \ \mu-K \le t < 0 \ , \\ \displaystyle\int_{0}^{\mu+K-1} (x-t)_+^{K-1}\psi(x)dx \ : \ 0 \le t \le \mu+K-1 \end{cases}
$$

である. この関数に関しては,

$$
(3.11)\qquad H_K(0+) - H_K(0-) = \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} x^{K-1}\psi(x)dx = N_{K-1}
$$

となる. 後で示すように, $N_{K-1} = 0$ であるから, $H_K(t)$ は $t=0$ で連続である.

次に, 台形則により得られる, scaling 係数, wavelet 係数の近似値の展開式を導く.

$$
(3.12)\qquad \begin{cases} \ddot{A}_k^{(j)} = \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}\Big)\phi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big) = \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}+\frac{k}{2^j}\Big)\phi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}\Big) \ , \\ \ddot{B}_k^{(j)} = \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}\Big)\psi_{j,k}\Big(\frac{r}{N}\Big) = \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}} f\Big(\frac{r}{N}+\frac{k}{2^j}\Big)\psi_{j,0}\Big(\frac{r}{N}\Big) \end{cases}
$$

に Taylor 展開式,

$$
(3.13)\qquad \begin{aligned} f\Big(\frac{r}{N}+\frac{k}{2^j}\Big) &= \sum_{i=0}^{K-1} \frac{1}{i!}\Big(\frac{r}{N}\Big)^i f^{(i)}\Big(\frac{k}{2^j}\Big) \\ &\quad + \int_{0}^{2^j r/N} \frac{1}{(K-1)!}\Big(\frac{r}{N}-\frac{t}{2^j}\Big)^{K-1} f^{(K)}\Big(\frac{t+k}{2^j}\Big)\frac{dt}{2^j} \end{aligned}
$$

を適用する. $f(x) \in W_{PC}^{K}[\mathrm{supp}\ \phi_{j,k}]$ に対して,

$$\ddot{A}_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\ddot{M}_{i,j}}{2^{ji} i!} f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right) + \int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} \frac{\ddot{G}_{K,j}(t)}{2^{jK}(K-1)!} f^{(K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right) dt \tag{3.14}$$

となる. ここで,

$$\ddot{M}_{i,j} = \frac{2^j}{N} \sum_{r=-\lambda\cdot 2^{p-j}}^{(2K-1-\lambda)\cdot 2^{p-j}} \left(\frac{2^j r}{N}\right)^i \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \tag{3.15}$$

は scaling 関数の i 次の離散 moment である. 又,

$$\ddot{G}_{K,j}(t) = \begin{cases} -\dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=-\lambda\cdot 2^{p-j}}^{-1} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_-^{K-1} \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) & : -\lambda \le t < 0 \ , \\ \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=0}^{(2K-1-\lambda)\cdot 2^{p-j}} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_+^{K-1} \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) & : 0 \le t \le 2K-1-\lambda \end{cases} \tag{3.16}$$

である. この式に関して,

$$\ddot{G}_{K,j}(0+) - \ddot{G}_{K,j}(0-) = \frac{2^j}{N} \sum_{r=-\lambda\cdot 2^{p-j}}^{(2K-1-\lambda)\cdot 2^{p-j}} \left(\frac{2^j r}{N}\right)^{K-1} \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) = \ddot{M}_{K-1,j} \tag{3.17}$$

である. 一般に, $\ddot{M}_{K-1,j} \neq 0$ であるから, $\ddot{G}_{K,j}(t)$ は $t=0$ で不連続である.
　同じように, $f(x) \in W_{PC}^{K}[\mathrm{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対して,

$$\ddot{B}_k^{(j)} = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{\ddot{N}_{i,j}}{2^{ji} i!} f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right) + \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} \frac{\ddot{H}_{K,j}(t)}{2^{jK}(K-1)!} f^{(K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right) dt \tag{3.18}$$

となる. ここで,

$$\ddot{N}_{i,j} = \frac{2^j}{N} \sum_{r=(\mu-K)\cdot 2^{p-j}}^{(\mu+K-1)\cdot 2^{p-j}} \left(\frac{2^j r}{N}\right)^i \psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \tag{3.19}$$

は wavelet 関数の i 次の離散 moment である. 又,

$$\ddot{H}_{K,j}(t) = \begin{cases} -\dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=(\mu-K)\cdot 2^{p-j}}^{-1} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_-^{K-1} \psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) & : \mu-K \le t < 0 \ , \\ \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=0}^{(\mu+K-1)\cdot 2^{p-j}} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_+^{K-1} \psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) & : 0 \le t \le \mu+K-1 \end{cases} \tag{3.20}$$

である．この関数に関して，

$$(3.21)\qquad \ddot{H}_{K,j}(0+)-\ddot{H}_{K,j}(0-)=\frac{2^j}{N}\sum_{r=(\mu-K)\cdot 2^{p-j}}^{(\mu+K-1)\cdot 2^{p-j}}\left(\frac{2^j r}{N}\right)^{K-1}\psi\left(\frac{2^j r}{N}\right)=\ddot{N}_{K-1,j}$$

である．$\ddot{N}_{K-1,j}=0$ であるから，$\ddot{H}_{K,j}(t)$ は $t=0$ で連続である．

以上から，$f(x)\in W_{PC}^K[\mathrm{supp}\ \phi_{j,k}\cup\mathrm{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対して，

$$(3.22)\qquad \begin{aligned}A_k^{(j)}-\ddot{A}_k^{(j)}&=\sum_{i=0}^{K-1}\frac{M_i-\ddot{M}_{i,j}}{2^{ji}i!}f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right)\\&+\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda}\frac{G_K(t)-\ddot{G}_{K,j}(t)}{2^{jK}(K-1)!}f^{(K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right)dt\ ,\end{aligned}$$

$$(3.23)\qquad \begin{aligned}B_k^{(j)}-\ddot{B}_k^{(j)}&=\sum_{i=0}^{K-1}\frac{N_i-\ddot{N}_{i,j}}{2^{ji}i!}f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right)\\&+\int_{\mu-K}^{\mu+K-1}\frac{H_K(t)-\ddot{H}_{K,j}(t)}{2^{jK}(K-1)!}f^{(K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right)dt\end{aligned}$$

となる．これらをより詳しく解析するには scaling 関数, wavelet 関数の moment についての検討を要する．

4. scaling 関数, wavelet 関数の moment の性質．

前章の多くの式に幾種類かの moment が現れた．ここでは，これらの性質について述べる．

Filter 係数に関する moment を，それぞれ，

$$(4.1)\qquad m_l=\sum_{k\in\mathbf{Z}}k^l c_k\quad ,\quad n_l=\sum_{k\in\mathbf{Z}}k^l\check{c}_k=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k k^l c_{2\mu-1-k}\quad : l\geq 0$$

とし，scaling 関数, wavelet 関数に関する moment を，それぞれ，

$$(4.2)\qquad M_l=\int_{\mathbf{R}}x^l\phi(x)dx\quad ,\quad N_l=\int_{\mathbf{R}}x^l\psi(x)dx\quad : l\geq 0$$

とする．多くの文献に与えられている様に，両者の間には，

$$(4.3)\qquad M_l=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}m_r M_{l-r}\quad ,\quad N_l=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}n_r M_{l-r}$$

なる関係式が成り立つ．この式は簡単に証明出来る．すなわち，

$$(4.4)\qquad \begin{aligned}M_l&=\int_{\mathbf{R}}x^l\phi(x)dx=\int_{\mathbf{R}}x^l\cdot 2\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\phi(2x-k)dx=2\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\int_{\mathbf{R}}\left(\frac{y+k}{2}\right)^l\phi(y)\frac{dy}{2}\\&=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}\Big\{\sum_{k\in\mathbf{Z}}k^r c_k\Big\}M_{l-r}=\frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{l}\binom{l}{r}m_r M_{l-r}\end{aligned}$$

となる. 他方,

$$N_l = \int_{\mathbf{R}} x^l \psi(x) dx = 0 \quad : \ 0 \le l \le K-1 \tag{4.5}$$

であるから, $M_0 = 1$ を使うと, 式 (4.3) の第二式から,

$$n_l = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k k^l c_{2\mu-1-k} = 0 \quad : \ 0 \le l \le K-1 \tag{4.6}$$

を得る.

moment の性質を知るには, Fourier 変換の援用を要する. 紛らわしさを避けるためにここで, まず Fourier 変換を定義する. すなわち,Fourier 変換を次の第一式とすると, 逆変換は第二式になる.

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \tag{4.7}$$

さて, dilation equation

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \phi(2x - k) \tag{4.8}$$

の両辺に Fourier 変換を適用すると,

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad , \quad m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{-ik\xi} \tag{4.9}$$

となる. ここで, $m_0(\xi)$ について吟味する.

$$m_0^{(l)}(\xi) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-ik)^l c_k e^{-ik\xi} \tag{4.10}$$

であるから,

$$\begin{aligned} m_0^{(l)}(\pi) &= (-i)^l \sum_{k \in \mathbf{Z}} k^l c_k (-1)^k = (-i)^l \sum_{k \in \mathbf{Z}} (2\mu - 1 - k)^l c_{2\mu-1-k} (-1)^{2\mu-1-k} \\ &= -(-i)^l \sum_{r=0}^{l} (-1)^r \binom{l}{r} (2\mu - 1)^{l-r} n_r = 0 \quad : \ 0 \le l \le K-1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる. 又, $m_0(\xi)$ は周期 2π の周期関数であるから, 結局

$$m_0^{(l)}(2\pi j + \pi) = 0 \quad : \ 0 \le l \le K-1 \ , \ j \in \mathbf{Z} \tag{4.12}$$

が成り立つ. 次に, 式 (4.9) の第一式を ξ に関して l 回微分する.

$$\hat{\phi}^{(l)}(\xi) = \frac{1}{2^l} \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} m_0^{(r)}\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}^{(l-r)}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{4.13}$$

である. 従って,

$$\hat{\phi}^{(l)}(2\pi j) = \frac{1}{2^l}\sum_{r=0}^{l} m_0^{(r)}(\pi j)\hat{\phi}^{(l-r)}(\pi j) \tag{4.14}$$

となる. $0 \leq l \leq K-1$ のとき, j が奇数については, $m_0^{(r)}(\pi j) = 0$ となるので, 上式は零である. j が偶数については, $\hat{\phi}^{(l-r)}(\pi j) = 0$ となるので, 上式は零になる. 従って,

$$\hat{\phi}^{(l)}(2\pi j) = 0 \quad : \ j = \pm 1, \pm 2, \cdots \quad , \ 0 \leq l \leq K-1 \tag{4.15}$$

を得る.

ここで, Strang-Fix の条件について言及する. すなわち,

$$\hat{f}(2\pi j) = 0 \ : \ j = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.16}$$

を Strang-Fix の条件と言う. Poisson の総和公式にこの条件を適用すると,

$$\sum_{j\in \mathbf{Z}} f(j) = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \hat{f}(2\pi j) = \hat{f}(0) = \int_{\mathbf{R}} f(x)dx \tag{4.17}$$

となる. すなわち, 積分は Riemann 和で与えられる. このように, Strang-Fix の条件が満たされる関数については, 積分が, Riemann 和に一致すると言う便利な性質がある. これを使うと次の定理を証明できる.

[定理. 1]　$m \in \mathbf{N}$ とする. $0 \leq l \leq K-1$ に対して,

$$\dot{M}_l = \frac{1}{m}\sum_{r \in \mathbf{Z}} \left(\frac{r}{m}\right)^l \phi\left(\frac{r}{m}\right) = \int_{\mathbf{R}} x^l \phi(x)dx = M_l \tag{4.18}$$

である. ここで, $\mathbf{N}$ は自然数の全体である.

[証明]　vanishing moment が K 次であるような wavelet 関数に対応する scaling 関数 $\phi(x)$ については, 既に述べたように, $0 \leq l \leq K-1$ に対して,

$$\hat{\phi}^{(l)}(2\pi j) = 0 \ : \ j = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.19}$$

が成り立つ. ここで,

$$f(t) = \frac{1}{m}\left(\frac{t}{m}\right)^l \phi\left(\frac{t}{m}\right) \tag{4.20}$$

とおく. 両辺に Fourier 変換を適用すると,

(4.21)

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{m}\int_{\mathbf{R}} \left(\frac{t}{m}\right)^l \phi\left(\frac{t}{m}\right) e^{-i\xi t}dt = \frac{1}{m}\int_{\mathbf{R}} s^l \phi(s) e^{-i\xi m s} m ds = \int_{\mathbf{R}} t^l \phi(t) e^{-i\xi m t}dt$$

である. 一方,

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbf{R}} \phi(t) e^{-i\xi t} dt \tag{4.22}$$

を ξ について l 回微分すると,

$$\hat{\phi}^{(l)}(\xi) = (-i)^l \int_{\mathbf{R}} t^l \phi(t) e^{-i\xi t} dt \tag{4.23}$$

となる. 従って,

$$\hat{f}(\xi) = i^l \hat{\phi}^{(l)}(m\xi) \tag{4.24}$$

である. Poisson の総和公式から得られる式に, 式 (4.19) を適用すると,

$$\sum_{r\in\mathbf{Z}} f(r) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \hat{f}(2\pi j) = i^l \sum_{j\in\mathbf{Z}} \hat{\phi}^{(l)}(2\pi m j) = i^l \hat{\phi}^{(l)}(0) \tag{4.25}$$

となる. 式 (4.23) より

$$\hat{\phi}^{(l)}(0) = (-i)^l \int_{\mathbf{R}} t^l \phi(t) dt = (-i)^l M_l \tag{4.26}$$

であるから,

$$\frac{1}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \left(\frac{r}{m}\right)^l \phi\left(\frac{r}{m}\right) = \int_{\mathbf{R}} x^l \phi(x) dx = M_l \quad : \quad 0 \le l \le K-1 \tag{4.27}$$

となる. **Q.E.D.**

[定理. 2]　$m \in \mathbf{N}$ とする. $0 \le l \le K-1$ に対して,

$$\dot{N}_l = \frac{1}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \left(\frac{r}{m}\right)^l \psi\left(\frac{r}{m}\right) = 0 \tag{4.28}$$

が成り立つ.

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \left(\frac{r}{m}\right)^l \psi\left(\frac{r}{m}\right) &= \frac{1}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \left(\frac{r}{m}\right)^l \cdot 2 \sum_{k\in\mathbf{Z}} \check{c}_k \phi\left(2 \cdot \frac{r}{m} - k\right) \\ &= \frac{2}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2^l} \left(\frac{2r}{m}\right)^l \sum_{k\in\mathbf{Z}} \check{c}_k \phi\left(\frac{2r}{m} - k\right) = \frac{1}{2^l} \frac{2}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \check{c}_k \left(\frac{2r}{m} + k\right)^l \phi\left(\frac{2r}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2^l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \left\{ \sum_{k\in\mathbf{Z}} \check{c}_k k^j \right\} \frac{2}{m} \sum_{r\in\mathbf{Z}} \left(\frac{2r}{m}\right)^{l-j} \phi\left(\frac{2r}{m}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

である. これを得るに際して,

$$n_j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \check{c}_k k^j = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^k k^j c_{2\mu-1-k} = 0 \quad : \ 0 \le j \le K-1 \tag{4.30}$$

を使った. **Q.E.D.**

次に, 離散 moment の性質について述べる.

$N = 2^p$ として,

$$\ddot{M}_{l,j} = \frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2^j r}{N}\right)^l \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \ , \ \ddot{N}_{l,j} = \frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2^j r}{N}\right)^l \psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \tag{4.31}$$

とする. $N = 2^p$ を使うと, これは又,

$$\begin{cases} \ddot{M}_{l,j} = \dfrac{1}{2^{p-j}}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{r}{2^{p-j}}\right)^l \phi\left(\frac{r}{2^{p-j}}\right) \ , \\ \ddot{N}_{l,j} = \dfrac{1}{2^{p-j}}\displaystyle\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{r}{2^{p-j}}\right)^l \psi\left(\frac{r}{2^{p-j}}\right). \end{cases} \tag{4.32}$$

の形に書く事も出来る. 式 (4.18), 式 (4.28) から直ちに,

$$\ddot{M}_{l,j} = M_l \ , \ \ddot{N}_{l,j} = 0 \quad : \ 0 \le l \le K-1 \ , \ j \le p \tag{4.33}$$

であることが分かる.

[定理. 3] 離散 moment と Filter 係数の moment の間に,

$$\ddot{M}_{l,j} = \frac{1}{2^l}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i} m_{l-i}\ddot{M}_{i,j+1} \ , \ \ddot{N}_{l,j} = \frac{1}{2^l}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i} n_{l-i}\ddot{M}_{i,j+1} \tag{4.34}$$

なる関係式が成り立つ.

[証明]

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{l,j} &= \frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2^j r}{N}\right)^l \phi_{j,0}\left(\frac{r}{N}\right) = \frac{2^j}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2^j r}{N}\right)^l \cdot 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \phi_{j+1,k}\left(\frac{r}{N}\right) \\ &= \frac{2^{j+1}}{N}\cdot 2^{jl}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{r}{N}\right)^l \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \phi_{j+1,0}\left(\frac{r}{N} - \frac{k}{2^{j+1}}\right) \\ &= \frac{2^{j+1}}{N}\cdot 2^{jl}\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{r}{N} + \frac{k}{2^{j+1}}\right)^l \phi_{j+1,0}\left(\frac{r}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2^l}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}\left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k k^{l-i}\right\}\frac{2^{j+1}}{N}\sum_{r\in\mathbf{Z}}\left(\frac{2^{j+1} r}{N}\right)^i \phi_{j+1,0}\left(\frac{r}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2^l}\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i} m_{l-i}\ddot{M}_{i,j+1} \end{aligned} \tag{4.35}$$

である. $\ddot{N}_{l,j}$ についても同じようにして証明出来る. **Q.E.D.**
次に, 式 (4.32) から

$$\ddot{M}_{K,p} = \sum_{r \in \mathbf{Z}} r^K \phi(r) \tag{4.36}$$

である.
[定理. 4] moment と, 離散 moment の間に,

$$M_K - \ddot{M}_{K,j} = \frac{1}{2^{K(p-j)}}(M_K - \ddot{M}_{K,p}) \tag{4.37}$$

なる関係式が成り立つ.
[証明]　式 (4.33) から得られる関係式,

$$M_i - \ddot{M}_{i,j+1} = 0 \ : \ 0 \leq i \leq K-1 \ , \ m_0 = 1 \tag{4.38}$$

を使うと, 式 (4.34) より,

$$\begin{aligned} M_K - \ddot{M}_{K,j} &= \frac{1}{2^K} \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} m_{K-i}(M_i - \ddot{M}_{i,j+1}) \\ &= \frac{1}{2^K} m_0 (M_K - \ddot{M}_{K,j+1}) = \frac{1}{2^K}(M_K - \ddot{M}_{K,j+1}) \end{aligned} \tag{4.39}$$

を得る. これを反復適用すると, 式 (4.37) が得られる. **Q.E.D.**
[定理. 5]

$$N_l - \ddot{N}_{l,j} = 0 \ : \ 0 \leq l \leq 2K-1 \tag{4.40}$$

である.
[証明]

$$N_l - \ddot{N}_{l,j} = \frac{1}{2^l} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} n_{l-i}(M_i - \ddot{M}_{i,j+1}) \tag{4.41}$$

である. ここで, $l = 2K-1$ のときを考えると,

$$N_{2K-1} - \ddot{N}_{2K-1,j} = \frac{1}{2^{2K-1}} \sum_{i=0}^{2K-1} \binom{2K-1}{i} n_{2K-1-i}(M_i - \ddot{M}_{i,j+1}) \tag{4.42}$$

である. 上式において $0 \leq i \leq K-1$ では $M_i - \ddot{M}_{i,j+1} = 0$ であり, $K \leq i \leq 2K-1$ では $n_{2K-1-i} = 0$ である. 従って上式$= 0$ となる. $l \leq 2K-2$ についても同じようにして確認出来る. **Q.E.D.**
[定理. 6]

$$N_{2K} - \ddot{N}_{2K,j} = \frac{1}{2^{K(p-j+1)}} \binom{2K}{K} n_K (M_K - \ddot{M}_{K,p}) \tag{4.43}$$

が成り立つ.

[証明]　式 (4.41) から, まず

$$
(4.44) \qquad N_{2K} - \ddot{N}_{2K,j} = \frac{1}{2^{2K}} \sum_{i=0}^{2K} \binom{2K}{i} n_{2K-i} (M_i - \ddot{M}_{i,j+1})
$$

である. 式 (4.33) と, $n_{2K-i} = 0 : K+1 \le i \le 2K$ を使うと,

$$
(4.45) \qquad N_{2K} - \ddot{N}_{2K,j} = \frac{1}{2^{2K}} \binom{2K}{K} n_K (M_K - \ddot{M}_{K,j+1})
$$

となる. 式 (4.37) を使うと, 式 (4.43) が得られる. **Q.E.D.**

5. 台形則により得られる **scaling** 係数, **wavelet** 係数の誤差

既に述べたように, $f(x) \in W_{PC}^{2K}[\mathrm{supp}\ \phi_{j,k}]$ に対して,

$$
(5.1) \qquad \begin{aligned} A_k^{(j)} - \ddot{A}_k^{(j)} &= \sum_{i=0}^{2K-1} \frac{M_i - \ddot{M}_{i,j}}{2^{ji} i!} f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \\ &+ \int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda} \frac{G_{2K}(t) - \ddot{G}_{2K,j}(t)}{2^{2jK}(2K-1)!} f^{(2K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right) dt \end{aligned}
$$

である. 核関数をあらためて書くと,

$$
(5.2) \qquad G_{2K}(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_{-\lambda}^{0} (x-t)_-^{2K-1} \phi(x) dx \ : \ -\lambda \le t < 0 \ , \\ \displaystyle\int_{0}^{2K-1-\lambda} (x-t)_+^{2K-1} \phi(x) dx \ : \ 0 \le t \le 2K-1-\lambda \end{cases}
$$

$$
(5.3) \qquad \ddot{G}_{2K,j}(t) = \begin{cases} -\dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=-\lambda N/2^j}^{-1} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_-^{2K-1} \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \ : \ -\lambda \le t < 0 \ , \\ \dfrac{2^j}{N} \displaystyle\sum_{r=0}^{(2K-1-\lambda)N/2^j} \left(\frac{2^j r}{N} - t\right)_+^{2K-1} \phi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \ : \ 0 \le t \le 2K-1-\lambda \end{cases}
$$

となる. 上の二つの式から, $\ddot{G}_{2K,j}(t)$ は $G_{2K}(t)$ の台形則による近似である事が分かる.

同じく, $f(x) \in W_{PC}^{2K}[\mathrm{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対して,

$$
(5.4) \qquad \begin{aligned} B_k^{(j)} - \ddot{B}_k^{(j)} &= \sum_{i=0}^{2K-1} \frac{N_i - \ddot{N}_{i,j}}{2^{ji} i!} f^{(i)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \\ &+ \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} \frac{H_{2K}(t) - \ddot{H}_{2K,j}(t)}{2^{2jK}(2K-1)!} f^{(2K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right) dt \end{aligned}
$$

である. 核関数をあらためて書くと,

$$(5.5)\qquad H_{2K}(t)=\begin{cases} -\displaystyle\int_{\mu-K}^{0}(x-t)_{-}^{2K-1}\psi(x)dx \ : \ \mu-K\le t<0 \ , \\ \displaystyle\int_{0}^{\mu+K-1}(x-t)_{+}^{2K-1}\psi(x)dx \ : \ 0\le t\le \mu+K-1 \end{cases}$$

$$(5.6)\qquad \ddot{H}_{2K,j}(t)=\begin{cases} -\dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r=(\mu-K)N/2^j}^{-1}\left(\frac{2^j r}{N}-t\right)_{-}^{2K-1}\psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \ : \ \mu-K\le t<0 \ , \\ \dfrac{2^j}{N}\displaystyle\sum_{r=0}^{(\mu+K-1)N/2^j}\left(\frac{2^j r}{N}-t\right)_{+}^{2K-1}\psi\left(\frac{2^j r}{N}\right) \ : \ 0\le t\le \mu+K-1 \end{cases}$$

となる. $\ddot{H}_{2K,j}(t)$ は $H_{2K}(t)$ の台形則による近似である事が分かる.

moment に関する公式を使うと, 式 (5.1) は,

$$(5.7)\qquad \begin{aligned} A_k^{(j)}-\ddot{A}_k^{(j)} &= \frac{M_K-\ddot{M}_{K,p}}{N^K\cdot K!}f^{(K)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \\ &+\sum_{l=K+1}^{2K-1}\frac{1}{N^K\cdot 2^{(l-K)j}\cdot l!}\cdot\frac{N^K(M_l-\ddot{M}_{l,j})}{2^{jK}}f^{(l)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \\ &+\frac{1}{N^K\cdot 2^{jK}\cdot(2K-1)!}\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda}\underline{G\ddot{G}}_{2K}^{(j)}(t)f^{(2K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right)dt \end{aligned}$$

$$(5.8)\qquad \underline{G\ddot{G}}_{2K}^{(j)}(t)=\frac{N^K\{G_{2K}(t)-\ddot{G}_{2K,j}(t)\}}{2^{jK}}=2^{(p-j)K}\{G_{2K}(t)-\ddot{G}_{2K,j}(t)\}$$

となる. 又, 式 (5.4) は,

$$(5.9)\qquad B_k^{(j)}-\ddot{B}_k^{(j)}=\frac{1}{N^K\cdot 2^{jK}\cdot(2K-1)!}\int_{\mu-K}^{\mu+K-1}\underline{H\ddot{H}}_{2K}^{(j)}(t)f^{(2K)}\left(\frac{t+k}{2^j}\right)dt$$

$$(5.10)\qquad \underline{H\ddot{H}}_{2K}^{(j)}(t)=\frac{N^K\{H_{2K}(t)-\ddot{H}_{2K,j}(t)\}}{2^{jK}}=2^{(p-j)K}\{H_{2K}(t)-\ddot{H}_{2K,j}(t)\}$$

となる. これらから,

$$(5.11)\qquad \begin{aligned} |A_k^{(j)}-\ddot{A}_k^{(j)}| &\le \frac{|M_K-\ddot{M}_{K,p}|}{N^K\cdot K!}||f^{(K)}||_\infty \\ &+\sum_{l=K+1}^{2K-1}\frac{1}{N^K\cdot 2^{(l-K)j}\cdot l!}\cdot\frac{N^K|M_l-\ddot{M}_{l,j}|}{2^{jK}}||f^{(l)}||_\infty \\ &+\frac{||f^{(2K)}||_\infty}{N^K\cdot 2^{jK}\cdot(2K-1)!}\int_{-\lambda}^{2K-1-\lambda}|\underline{G\ddot{G}}_{2K}^{(j)}(t)|dt \end{aligned}$$

となる. 又,

$$(5.12) \qquad |B_k^{(j)} - \ddot{B}_k^{(j)}| \le \frac{||f^{(2K)}||_\infty}{N^K \cdot 2^{jK} \cdot (2K-1)!} \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} |\underline{H\ddot{H}}_{2K}^{(j)}(t)| dt$$

である.

式 (5.7),(5.11) における $N^K 2^{-jK}(M_l - \ddot{M}_{l,j}) = 2^{(p-j)K}(M_l - \ddot{M}_{l,j})$ の大きさは j に大きくは依存しない. 又, $\underline{G\ddot{G}}_{2K}^{(j)}(t)$ の大きさも j に大きくは依存しない.

式 (5.9),(5.12) における $\underline{H\ddot{H}}_{2K}^{(j)}(t)$ の大きさは j に大きくは依存しない.

$|A_k^{(j)} - \ddot{A}_k^{(j)}|$ の大きさは, ほぼ $||f^{(K)}||_\infty |M_K - \ddot{M}_{K,p}|/(N^K \cdot K!)$ の程度である.

$|B_k^{(j)} - \ddot{B}_k^{(j)}|$ の大きさは, 式 (5.9),(5.12) から分かるように j に依存する. $O(2^{-jK})$ 程度である. 一方,

$$(5.13) \qquad B_k^{(j)} = \int_{\mu-K}^{\mu+K-1} \frac{H_K(t)}{2^{jK}(K-1)!} f^{(K)}\Big(\frac{t+k}{2^j}\Big) dt$$

であるから, $B_k^{(j)}$ の大きさも $O(2^{-jK})$ 程度である. 従って $\ddot{B}_k^{(j)}$ の相対誤差は j に大きくは依存しない.

以上が本稿の結果である.

6. おわりに.

$f(x) \in W_{PC}^{2K}[\text{supp}\ \phi_{j,k} \cup \text{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対する scaling 係数, wavelet 係数の台形則による近似の誤差評価を得た. これにより, 誤差の性質が明らかになった.

ここには与えていないが, $|M_K - \ddot{M}_{K,j}|$, $\int |\underline{H\ddot{H}}_{2K}^{(j)}| dt$ の値等を $2 \le K \le 10$ について計算した.

他方, Wavelet 変換の初期値の与え方は他にも種々ある. 最も簡単な方法は, 一点積分公式 (One Point Quadrature formula) の適用であり, 最もよく使われている.

次に, いくつかの文献に現れている方法に, 補間による方法がある. (文献 [4])

別の方法として, 台形則と同一の収束率であるが標本点の個数が少ない数値積分公式がある. 本文中で述べたように台形則は $2K-2$ 個の標本点を使って, 誤差の収束率は $O(N^{-K})$ 程度である. 一方, K 個の標本点を使って, 誤差が $O(N^{-K})$ の公式がある. これは, 文献 [1] に与えられている.

更に, 台形則より収束率の高い数値積分公式を構成する事が出来る. すなわち, $f(x) \in W_{PC}^{3K}[\text{supp}\ \phi_{j,k} \cup \text{supp}\ \psi_{j,k}]$ に対して, $2K$ 個の標本点を使って, $O(N^{-2K})$ の公式を作ることが出来る.

今後, これらの公式に対しても, 誤差を解析したいと考えている.

[参考文献]

[1] W.Sweldens and R.Piessens : Quadrature fomulae and asymptotic expansions for wavelet approximations of smooth functions , SIAM J. Numer. Anal. 31(1994), pp.1240-1264.

[2] Philip J. Davis : Interpolation & Approximation , p.393(1975)

[3] Anthony Ralston , Philip Rabinowitz : A First Course in Numerical Analysis , p.556(1978)

[4] I.Daubechies : Ten Lectures on Wavelet.(SIAM, 1992)